APRIL/MAY 2025

CMA53 — COMPLEX ANALYSIS – I

Time : Three hours Maximum : 75 marks

SECTION A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL the questions.



1. Define mapping.

   சார்பிடல் வரையறு.

2. Evaluate $\left(\frac{1}{2-3i}\right)\left(\frac{1}{1+i}\right)$.

   $\left(\frac{1}{2-3i}\right)\left(\frac{1}{1+i}\right)$ மதிப்பு காண்க.

3. Verify C.R equations for the function $f(z)=e^{x}(\cos y+i\sin y)$.

   $f(z)=e^{x}(\cos y+i\sin y)$ என்ற சார்பிற்கான C.R சமன்பாடுகளைச் சரிபார்க்கவும்.

4. Define an analytic functions.

   ஒரு பகுப்பு சார்பு - வரையறு.

5. Prove that $u = 2x - x^3 + 3xy^2$ is harmonic function.

$u = 2x - x^3 + 3xy^2$ என்பது இசைச்சார்பு என நிறுவுக.

6. Define critical point.

மாறுநிலை புள்ளி வரையறு.

7. If $w = T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ is a bilinear transformation find $T^{-1}(w)$.

$w = T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ இரு ஒருபடி உருமாற்றம் எனில் $T^{-1}(w)$ யைக் காண்க.

8. Show that the transformation $w = iz + i$ transforms the half plane $x > 0$ onto the half plane $v > 1$.

$x > 0$ என்ற அரைதளத்தை $w = iz + i$ என்ற உருமாற்றம் $v > 1$ என்ற அரை தளமாக மாற்றுகிறது என காட்டுக.

9. State Cauchy's theorem.

காஷியின் தேற்றத்தை கூறுக.



18. Show that $u = \log\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ is harmonic and find its conjugate and the corresponding analytic function $f(z)$.

$u = \log\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ என்பது இசை சார்பு எனக் காட்டுக. மேலும் அதன் இணையினையும் அதற்காக பகுமுறை சார்பு $f(z)$ - யும் காண்க.

19. Show that a bilinear transformation $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ where $ad - bc \neq 0$ maps the real axis into itself iff a, b, c, d are real.

a, b, c, d மெய்யெண்கள் மற்றும் $ad - bc \neq 0$ எனில் $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ மெய்யச்சினை மெய்யச்சிற்கே உருமாற்றும் எனக் காட்டுக.

20. If f is analytic within and on a simple closed curve C and z is any point interior to C, then prove that $f'(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\int_c \dfrac{f(s)\,ds}{(s-z)^2}$.

C எனும் சாதாரண மூடிய வளைவிலும் உட்புறத்திலும் f என்பது பகுமுறைச் சார்பு மற்றும் z என்பது C - ன் உட்புறத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளி எனில் $f'(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\int_c \dfrac{f(s)\,ds}{(s-z)^2}$ என நிரூபி.

SECTION C — ($3 \times 10 = 30$ marks)

Answer any THREE questions.

16. If $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$ and $\lim\limits_{z \to z_0} F(Z) = W_0$ then prove that

(a) $\lim\limits_{z \to z_0} [f(z) + F(z)] = w_0 + W_0$

(b) $\lim\limits_{z \to z_0} [f(z) F(z)] = w_0 W_0$

(c) If $W_0 \neq 0$, $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{F(z)} = \dfrac{w_0}{W_0}$

$\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$ மற்றும் $\lim\limits_{z \to z_0} F(Z) = W_0$ எனில்

(அ) $\lim\limits_{z \to z_0} [f(z) + F(z)] = w_0 + W_0$

(ஆ) $\lim\limits_{z \to z_0} [f(z) F(z)] = w_0 W_0$

(இ) $W_0 \neq 0$, $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{F(z)} = \dfrac{w_0}{W_0}$

17. State and prove Cauchy's Riemann equations.

காஷி ரெய்மான் சமன்பாடுகளை கூறி நிறுவுக.

Shanmugha Industries Arts & Science College
T.V.Malai

10. Evaluate $\int\limits_C \dfrac{e^z}{z} dz$ where C is the circle $|z| = 1$.

$|z| = 1$ என்ற வட்டத்தில் $\int\limits_C \dfrac{e^z}{z} dz$ ன் மதிப்பை கண்டுபிடி.

SECTION B — ($5 \times 5 = 25$ marks)

Answer ALL questions.

11. (a) Prove that $\operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Re} z$.

$\operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Re} z$ என நிறுவுக.

Or

(b) Show that $\lim\limits_{z \to 2i} (2x + iy^2) = 4i$.

$\lim\limits_{z \to 2i} (2x + iy^2) = 4i$ எனக் காட்டுக.

12. (a) Prove that the function $f(z) = z^2$ is differentiable at every point and $f'(z) = 2z$.

$f(z) = z^2$ எனும் சார்பு ஒவ்வொரு புள்ளிகளிலும் வகையிடத்தக்கவை மற்றும் $f'(z) = 2z$ எனவும் நிரூபி.

Or

(b) Verify whether the following function is analytic $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$.

$f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$ என்ற செயல்பாடு பகுப்பாய்வு உள்ளதா என சோதிக்கவும்.

13. (a) Discuss the transformation $w = \overline{z}$.

$w = \overline{z}$ என்ற உருமாற்றத்தை ஆராய்க.

Or

(b) Suppose that the analytic functions $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ maps a domain D_z in the $z-$ plane onto a domain D_w in the w plane. If $h(u,v)$ is a harmonic function defined on D_w, the prove that the functions. $H(x,y) = h[u(x,y), v(x,y)]$ is harmonic in D_2.

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ என்ற பகுமுறை சார்பானது z தளத்தில் உள்ள D_z மதிப்பகத்திலிருந்து w தளத்திலுள்ள D_w என்ற மதிப்பகத்திற்கு கோப்பு ஆகும். மற்றும் $h(u,v)$ என்பது D_w மேல் வரையறுக்கப்பட்ட இசை சார்பு எனில் D_2 இசைச்சார்பிலுள்ள $H(x,y) = h[u(x,y), v(x,y)]$ என்ற சார்பை நிறுவுக.



14. (a) Find the bilinear transformation which maps $z = \infty, i, 0$ onto $w = 0, i, \infty$ respectively.

$z = \infty, i, 0$ வை முறையே $w = 0, i, \infty$ ஆக கோர்க்கும் இருபடி நேரியல் உருமாற்றம் காண்க.

Or

(b) Explain the transformation $w = \sin z$.

$w = \sin z$ என்ற உருமாற்றத்தை விவரி.

15. (a) Using Cauchy's integral formula find the value of $\int_C \frac{z\,dz}{(9-z^2)(z+i)}$ where C is the circle $|z| = 2$.

காஷியின் தொகை சூத்திரத்தை பயன்படுத்தி $\int_C \frac{z\,dz}{(9-z^2)(z+i)}$, $|z| = 2$ ன் மதிப்பைக் காண்க.

Or

(b) Using the method of contour integration, Evaluate $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 4\sin\theta}$.

நெளிவு வரை தொகையிடல் மூலம் $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 4\sin\theta}$ ஐ மதிப்பிடுக.